Л 8. Понятие производной функции. Геометрический и физический смысл производной. Понятие дифференцируемости функций. Дифференциал функции. Правило дифференцирования сложной функции. Раскрытие неопределенностей

Цель лекции: познакомить студентов с понятием производной функции одной переменной, её геометрическим и физическим смыслом, определить понятие дифференцируемости и дифференциала функции. Научить применять основные правила дифференцирования, в том числе правило дифференцирования сложной функции, и использовать производные для раскрытия неопределённостей.

Основные вопросы

- Приращение аргумента и приращение функции.
- Производная функции в точке и её определение.
- Дифференцируемость функции.
- Связь дифференцируемости и непрерывности.
- Геометрический смысл производной — касательная к графику.
- Физический смысл производной — мгновенная скорость.
- Производные основных элементарных функций.
- Правила дифференцирования
- Дифференцирование сложной функции (правило цепочки).
- Параметрически заданная функция и её производная.
- Дифференциал функции, формула для дифференциала.
- Раскрытие неопределённостей с помощью производных.

Краткое содержание: на лекции вводится понятие производной через предел отношения приращений. Рассматриваются геометрический смысл производной как углового коэффициента касательной и физический смысл производной как мгновенной скорости. Изучается понятие дифференцируемости, дифференциала и основные правила дифференцирования, включая дифференцирование сложной и параметрически заданной функций. Показано, как использовать производные для раскрытия неопределённостей.

Пусть в некоторой окрестности точки x_0 и в самой точке x_0 определена функция $y = f(x)$.

Определение. Приращением аргумента x в точке x_0 называется разность $\Delta x = x - x_0$.

Определение. Приращением функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется разность

$$\Delta f = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Это приращение зависит от двух аргументов x_0 и Δx. Геометрически Δx и Δf означают изменения абсциссы и ординаты точки на графике $y = f(x)$ при перемещении из точки $(x_0, f(x_0))$ в точку $(x, f(x))$

Определение. Если функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0$, то она называется непрерывной в точке x_0. В самом деле, этот предел означает, что

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left(f(x) - f(x_0) \right) = 0, \text{ т. е. } \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Определение. Если существует предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0)$ то это число называется производной функции $y = f(x)$ в точке x_0. Эта производная обозначается также одним из следующих символов:

$$y'(x_0)\ ,\ \frac{df}{dx}(x_0)\ ,\ f'_x\Big|_{x=x_0}\ ,\ \frac{df}{dx}\Big|_{x=x_0}.$$

Этот предел можно записывать также в виде

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Определение. Функция $y = f(x)$ называется дифференцируемой в точке x_0, если она имеет конечную производную в этой точке.

Выясним теперь связь между дифференцируемостью и непрерывностью функции, для этого из определения выразим Δf. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0) \Leftrightarrow \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x)$, (где $\alpha(\Delta x)$ - б.м. при $\Delta x \to 0$ (свойство 3^0 б.м., модуль 3)).

Следовательно, $\Delta f = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$.

Теорема. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.

1.1. Механический смысл производной. Пусть некоторая точка движется вдоль прямой и за время t проходит путь $S(t)$.

Тогда за промежуток времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$ она проходит путь $S(t_0 + \Delta t) - S(t_0) = \Delta S$, и средняя скорость точки на промежутке $[t_0, t_0 + \Delta t]$ равна $v_{cp} = \dfrac{\Delta S}{\Delta t}$. Мгновенная скорость v точки в момент t_0 равна пределу v_{cp} при $\Delta t \to 0$ $\quad v(t_0) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} v_{cp} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta S}{\Delta t} = S'(t_0)$.

Итак, мгновенная скорость точки в момент t_0 равна производной от пути, проходимого этой точкой по времени при $t = t_0$. Это и есть механический смысл производной.

1.2. Геометрический смысл производной. Через две точки $A(x_0, f(x_0))$ и $B(x_0 + \Delta x,\ f(x_0) + \Delta f)$ на графике функции $y = f(x)$ проведем прямую. Эта прямая называется секущей к графику функции. Ее угловой коэффициент, т.е. тангенс угла наклона к оси Ox равен

$$tg\varphi = \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Здесь Δx может быть как положительным, так и отрицательным.

Определение. Касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется прямая, являющаяся предельным положением секущей, проходящей через точку $(x_0, f(x_0))$ при $\Delta x \to 0$.

Другими словами, касательная AD в точке $(x_0, f(x_0))$ - это прямая, проходящая через $(x_0, f(x_0))$, угловой коэффициент которой $tg\varphi_0 = \lim\limits_{\Delta x \to 0} tg\varphi$. Если $f'(x_0)$ существует, то из (1) следует, что $tg\varphi_0 = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0)$. В этом случае график функции в точке x_0 имеет касательную.

Таким образом, $f'(x_0)$ есть угловой коэффициент касательной к графику $y = f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$ (геометрический смысл производной).

Уравнение этой касательной имеет вид $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

Если $f'(x_0)$ не существует, то касательной к графику функции в точке $(x_0, f(x_0))$ провести нельзя (например, $y = |x|$ при $x_0 = 0$).

Вычислим производные некоторых основных элементарных функций, исходя из определения производной.

1. Постоянная функция $y = C$. $C' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{C - C}{\Delta x} = 0$.

2. Показательная функция $y = x^a$, $a > 0$, $a \neq 1$.

$$\left(a^x\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a.$$

В частности, $\left(e^x\right)' = e^x \ln e = e^x$.

3. Степенная функция $y = x^a$.

$$\left(x^a\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^a - x^a}{\Delta x} = x^a \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^a - 1}{\Delta x} = x^{a-1} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^a - 1}{\frac{\Delta x}{x}} = \left| \begin{array}{l} \frac{\Delta x}{x} = h \\ x \neq 0, h \to 0 \end{array} \right| =$$

$$= x^{a-1} \lim_{h \to 0} \frac{(1 + h)^a - 1}{h} = a \cdot x^{a-1}$$

В частности, $\left(x^2\right)' = 2 \cdot x^{2-1} = 2x$, $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $\left(\frac{1}{x}\right)' = -1x^{-1-1} = -\frac{1}{x^2}$.

Теорема 1. (правила дифференцирования суммы, произведения и частного). Если функции $y = u(x)$ и $y = v(x)$ дифференцируемы в точке x, то сумма, произведение и частное этих функций (частное при условии, что $v(x) \neq 0$) также дифференцируемы в этой точке и имеют место следующие формулы:

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$ 2. $(u \cdot v)' = u'v + uv'$ 3. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Дифференцирование сложной функции. Пусть функция $u = u(x)$ дифференцируема в точке x_0, $u(x_0) = u_0$, функция $y = f(u)$ дифференцируема в точке u_0, тогда сложная функция $y = f(u(x))$ дифференцируема в x_0 и ее производная равна $[f(u(x_0))]' = f'(u_0) \cdot u'(x_0)$.

Параметрически заданная функция и ее производная.

Функцию $y = f(x)$ иногда удобно записывать в параметрическом виде

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \qquad t \in [\alpha, \beta]. \end{cases}$$

Таким образом описывается движение точки на плоскости в механике (t– время, x, y– координаты точки).

Теорема. Пусть функция $y = f(x)$ задана в параметрическом виде $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$ где φ и ψ определены в окрестности t_0, $\varphi(t_0) = x_0$. Тогда, если производные $\varphi'(t_0)$ и $\psi'(t_0)$ существуют и $\varphi'(t_0) \neq 0$, то функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0) = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}$.

Определение. Если приращение функции $y = f(x)$ в точке x_0 можно представить в виде $\Delta f = a \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$, где a - число, а $\alpha(\Delta x)$- б.м. при $\Delta x \to 0$, то величина $df(x_0) = a \cdot \Delta x$ называется дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке x_0 (главной частью приращения).

Теорема (о дифференциале). Для того, чтобы функция $y = f(x)$ имела дифференциал в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы существовала производная $f'(x_0)$, при этом $df(x_0) = f'(x_0)\Delta x$ (т.е. $a = f'(x_0)$).

Пример. Вычислить приближенно $\sin 46^0$. Имеем

$$f(x) = \sin x, f'(x) = (\sin x)' = \cos x, x_0 = 45^\circ = \frac{\pi}{4}, \Delta x = 1^\circ = \frac{\pi}{180} \Rightarrow$$

$$\sin(45^\circ + 1^\circ) \approx \sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3{,}14}{180} \approx 0{,}7191$$

Правила вычисления дифференциала непосредственно следуют из правил вычисления производных.

Пусть функции $y = u(x)$ и $y = v(x)$ дифференцируемы в точке, тогда

1) $d(u \pm v) = du \pm dv$, $d(u + c) = du$, где с – число.

2) $d(u \cdot v) = vdu + udv$, $d(cu) = c \cdot du$.

3) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$, если $v(x) \neq 0$.

4) Если функция $u = u(x)$ дифференцируема в точке x, а $y = f(u)$ в соответствующей точке u, то для сложной функции $y = f(u(x))$, $df(u) = f'(u) \cdot u'(x)dx = f'(u)du$.

Это правило называют инвариантностью формы дифференциала. Для функции $y = f(u)$ дифференциал $df = f'(u)du$, как в случае, когда u- независимая переменная, так и в случае, когда $u = u(x)$ есть функция другой переменной x.

Вопросы для самоконтроля

1. Что называют приращением аргумента и приращением функции?
2. Запишите определение производной функции в точке.
3. Что означает, что функция дифференцируема в точке?
4. Что означает геометрический смысл производной?
5. В чём состоит физический смысл производной?
6. Сформулируйте свойства производной постоянной, степенной и показательной функций.
7. Выпишите формулы дифференцирования суммы, произведения и частного функций.
8. Запишите правило дифференцирования сложной функции.
9. Как вычисляется производная параметрически заданной функции?
10. Что называют дифференциалом функции?
11. Когда функция имеет дифференциал?
12. Как дифференциал связан с производной?
13. Как производная помогает раскрывать неопределённости вида $\frac{0}{0}$?

Литература

1. Махмеджанов Н., Махмеджанова Р.Н. Сборник задач по высшей математике. – 2009. – 408 стр
2. Н.М. Махмеджанов. Сборник заданий по высшей математике. Алматы: «Қазақ Университеті», 2021
3. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа, 2005. Т.1. Т.2.
4. Демидович Сборник задач по математическому анализу